- **المجموعات المرتبة:** نقول عن العلاقة الثنائية R على مجموعة غير خالية E أنها علاقة ترتيب على E أو ترتيب جزئي إذا حققت الشروط الآتية:
- R انعكاسية أي: $\forall x\in E , xRx$
- R تخالفية أي إذا كان: xRy و yRx فإن: $x=y$
- R متعدية أي إذا كان: xRy و yRz فإن: xRz
- وبشكل عام فإننا سنكتب علاقة الترتيب $x\leq y$ ، بدلاً من xRy
- ومن أجل وجود التباس ومنعاً للغموض فإننا نكتب: $x\leq_E y$ أو $x\leq_1 y$
- إن المجموعة E المزودة بعلاقة ترتيب سوف ندعوها مجموعة مرتبة. (إذا كان يوجد أكثر من علاقة ترتيب واحدة)

- **أمثلة:**

1) مجموعة الأعداد الطبيعية مزودة بعلاقة الترتيب المألوفة $x\leq y$ هي مجموعة مرتبة.
2) مجموعة الأعداد الطبيعية N^* (N ماعدا الصفر) المزودة بعلاقة يقسم $(x\backslash y)$ (x يقسم y) المعرفة كما يلي:
يوجد $a\in N^*$ بحيث يكون: $y=ax$ هي أيضاً مجموعة مرتبة.
3) مجموعة أجزاء المجموعة E و $P(E)$ المزودة بعلاقة الاحتواء $X\subseteq Y$ (حيث E مجموعة ما) هي مجموعة مرتبة.

- سوف نستخدم أيضاً الرموز الآتية:

$x\nleq y$: x ليست أصغر من y.

$x<y$: x أصغر تماماً من y أي أن: $x\leq y$ و $x\neq y$

نقول عن العنصرين x,y أنهما متقارنان إذا كان:
$x\leq y$ أو $y\leq x$ ، وإذا كان خلاف ذلك فإننا نقول عنهما أنهما غير متقارنان أي أن:

$x\nleq y$ و $y\nleq x$

- نقول عن علاقة ترتيب أنها ترتيب كلي إذا كانت جميع عناصرها متقارنة أي إذا كان أي اثنين منها متقارنين ونسميها أيضاً بالسلسلة.

- **أمثلة:** 1) N مع علاقة الترتيب العادية هي سلسلة.
2) N^* مع علاقة يقسم ليست سلسلة.
3) $P(E)$ مع علاقة الاحتواء ليست سلسلة.

- **ملاحظة:** في حالة السلسلة إذا كان $(x\nleq y)$ فهذا يكافئ $(y\leq x)$.



- الترتيب العكسي :

ليكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة فيمكن عندئذٍ تعريف علاقة جديدة على E تكتب $x \geq y$ والذي يكافئ $x \leq y$ ويمكن التحقق بسهولة بأنها علاقة ترتيب على E. ندعو العلاقة $y \geq x$ بعلاقة الترتيب العكسية للعلاقة $x \leq y$.

- الترتيب المولد (أو مقصور علاقة الترتيب) :

ليكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة و A مجموعة جزئية من E وغير خالية، فإن أثر علاقة الترتيب $(\leq)$ على $(A \times A)$ هي علاقة ترتيب على A نرمز لها بـ $x \leq_A y$ والمعرفة بالشكل:

$x \leq y$ و $x, y \in A$ وتدعى هذه العلاقة علاقة الترتيب المولدة بـ $\leq$ على A.

- مثال :

لتكن المجموعة المرتبة $(N^*, |)$ ولتكن : $A = \{1, 2, 8, 64\}$ ونلاحظ أن A هي سلسلة من أجل الترتيب المولد رغم أن علاقة الترتيب على N^* ليست كلية.

- ترتيب الجداء :

لتكن $\{(E_i, \leq_i)\}_{i \in I}$ أسرة من المجموعات المرتبة، عندئذٍ يمكن أن نعرف على مجموعة الجداء : $E = \prod_{i \in I} E_i$ العلاقة: $(x_i) \leq (y_i)$ كما يلي :
$x_i \leq y_i$ وذلك من أجل $i \in I$.

ويمكن البرهان بسهولة على أنها علاقة ترتيب على E ندعوها علاقة ترتيب الجداء.

- حالة خاصة :

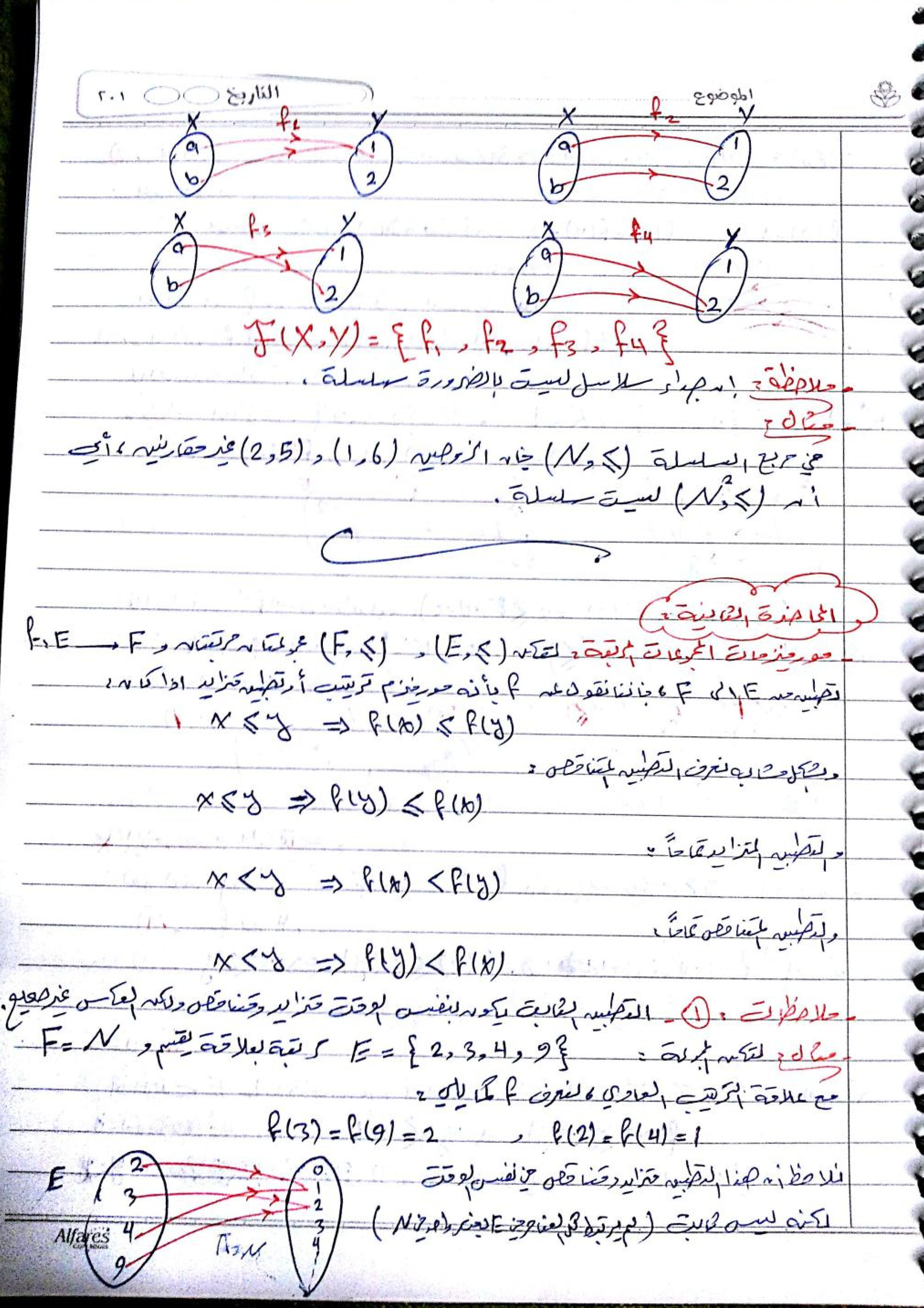
لتكن $\mathcal{F}(E, F)$ مجموعة من [redacted] التطبيقات من E إلى F فيمكن مطابقتها مع المجموعة (F^E) أي مع $\prod_{x \in E} F_x$ حيث: $F_x = F$
أي أنه يمكن مطابقة كل تطبيق: $f : E \longrightarrow F$ مع أسرة $(f(x))_{x \in E}$
فإذا كانت F مجموعة مرتبة فيمكن عندئذٍ تعريف علاقة ترتيب الجداء على المجموعة $\mathcal{F}(E, F)$ كما يلي :

$f \leq g$ إذا وفقط إذا كان: $f(x) \leq g(x)$ وذلك من أجل $x \in E$.

- مثال : $Y = \{1, 2\}$ ، $X = \{a, b\}$

$Y^X = \mathcal{F}(X, Y)$

$Y^X = \prod_{x \in X} Y_x = Y \times Y = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$



$$\mathcal{F}(X,Y) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

- ملاحظة: إن جداء سلاسل ليست بالضرورة سلسلة.
- مثال:

في جداء السلسلة $(N,\leq)$ جداء الزوجين $(1,6)$ و $(2,5)$ غير متقارنين، أي أن $(N^2,\leq)$ ليست سلسلة.

المحاضرة الثانية:

- مورفيزمات المجموعات المرتبة: لتكن $(E,\leq)$ و $(F,\leq)$ مجموعتان مرتبتان و $f: E \to F$ تطبيق من E إلى F، فإننا نقول عن f بأنه مورفيزم ترتيب أو تطبيق متزايد إذا كان:

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

وبشكل مشابه نعرف التطبيق المتناقص:

$$x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$$

والتطبيق المتزايد تماماً:

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

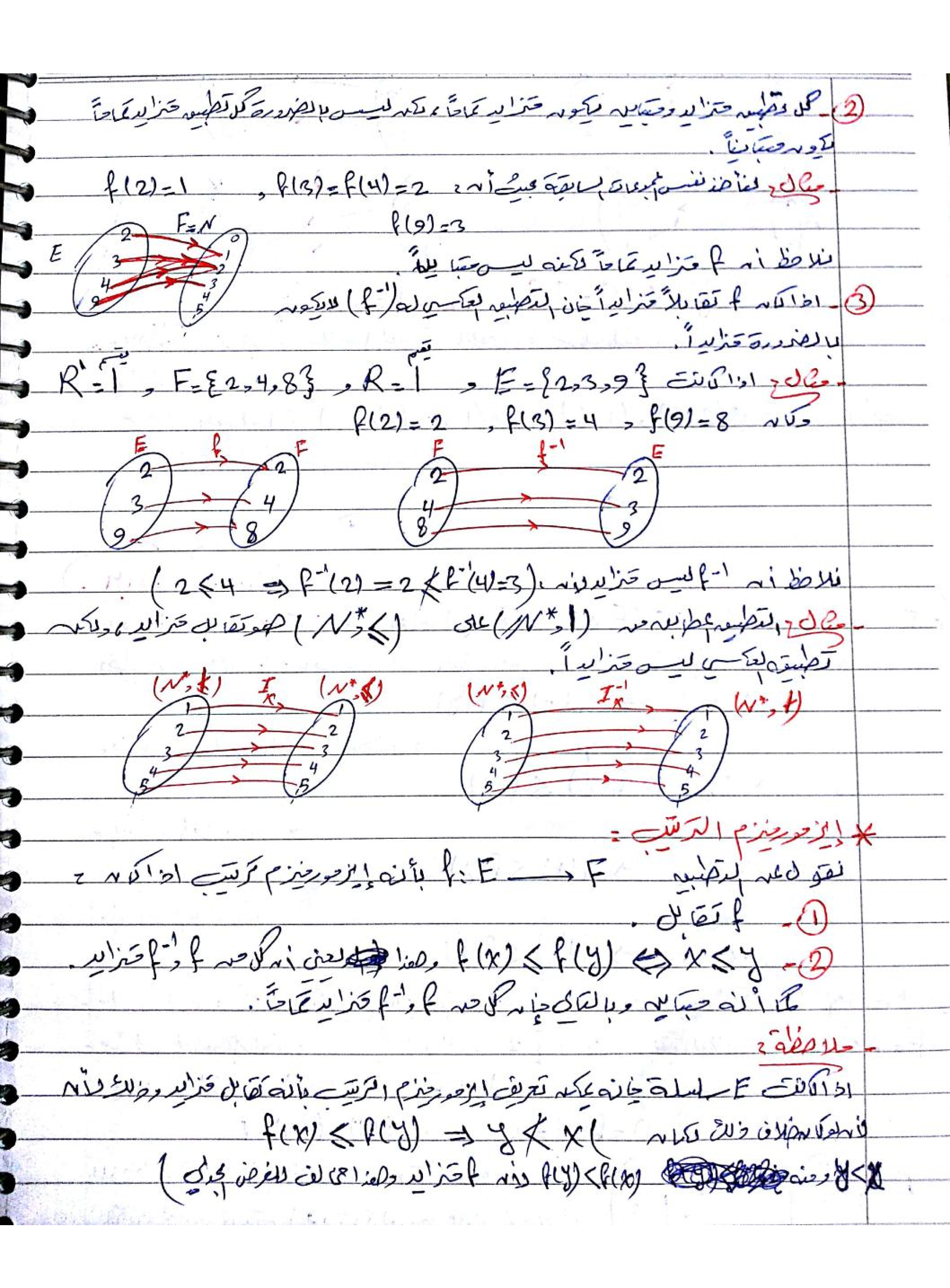
والتطبيق المتناقص تماماً:

$$x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$$

- ملاحظات: ① التطبيق الثابت يكون بنفس الوقت متزايد ومتناقص ولكن العكس غير صحيح.
- مثال: لتكن المجموعة $E = \{2,3,4,9\}$ مرتبة بعلاقة القسمة و $F = N$ مع علاقة الترتيب العادي، ولنعرف f كما يلي:

$$f(3) = f(9) = 2 \quad , \quad f(2) = f(4) = 1$$

نلاحظ أن هذا التطبيق متزايد ومتناقص في نفس الوقت لكنه ليس ثابت (لم يرتبط كل عناصر E بعنصر واحد من N)



② - كل تطبيق متزايد ومتباين فيكون متزايد تماماً، لكن ليس بالضرورة كل تطبيق متزايد تماماً يكون متبايناً.

- مثال: لنأخذ نفس المجموعات السابقة بحيث أن: $f(2)=1$, $f(3)=f(4)=2$, $f(9)=3$

نلاحظ أن f متزايد تماماً لكنه ليس متبايناً.

③ - اذا كان f تقابلاً متزايداً فإن التطبيق العكسي له (f^{-1}) لا يكون بالضرورة متزايداً.

- مثال: اذا كانت $E=\{2,3,9\}$ و $R=|$ (يقسم) ، $F=\{2,4,8\}$ و $R'=|$ (يقسم)

وكان $f(9)=8$, $f(3)=4$, $f(2)=2$

نلاحظ أن f^{-1} ليس متزايداً لأن ($2 \leq 4 \Rightarrow f^{-1}(2)=2 \not\leq f^{-1}(4)=3$)

- مثال: التطبيق المطابق من $(N^*, |)$ على $(N^*, \leq)$ هو تقابل متزايد، ولكن تطبيقه العكسي ليس متزايداً.

* إيزومورفيزم الترتيب:

نقول عن التطبيق $f: E \longrightarrow F$ بأنه إيزومورفيزم ترتيب اذا كان:

① - f تقابل.

② - $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ وهذا يعني أن كل من f و f^{-1} متزايد.

كما أنه متباين وبالتالي فإن كل من f و f^{-1} متزايد تماماً.

- ملاحظة:

اذا كانت E سلسلة فإنه يمكن تعريف إيزومورفيزم الترتيب بأنه تقابل متزايد وذلك لأنه لو كان بخلاف ذلك لكان $f(x) \leq f(y) \Rightarrow y \not< x$ (

$y<x$ ومنه $f(y)<f(x)$ لأن f متزايد وهذا خلاف الفرض الجدلي)

التاريخ   ٢٠١

الموضوع

$x \leq y \Rightarrow$ لأن E سلسلة

وبالتالي فإن f متزايد.

- العناصر الخاصة:

لتكن المجموعة المرتبة $(E, \leq)$ لنتعرف فيها أربعة عناصر تلعب دوراً هاماً في المجالات المرتبة.

① - العنصر الأعظمي: يسمى M عنصراً أعظمياً في E إذا كان من أجل أي $x \in E$ فإن $(M \not< x)$ ومعنى ذلك أنها $M \leq x$ أو أن x, M غير متقاربين.

- مثال:

لتكن $E = \{2, 3, 4, 9\}$ مرتبة بعلاقة تقسيم فإن 4 و 9 هما عنصران أعظميان.

② - العنصر الأكبر: يسمى b العنصر الأكبر في E إذا كان من أجل أي $x \in E$ فإن:

$b \geq x$ إن هذا العنصر إن وجد فهو وحيد لأنه إذا فرضنا وجود اثنين b, b' فإنه يكون $b \leq b'$ و $b' \leq b \Rightarrow b = b'$.

- مثال:

في المثال السابق لا تملك E عنصر أكبر.

- مثال: إذا كانت $E = \{2, 3, 6\}$ المرتبة بعلاقة تقسيم فإن العنصر 6 يكون عنصر أكبر.

- ملاحظة:

- إذا ملكت E عنصر أكبر b فإن b يكون أيضاً عنصراً أعظمياً وهو الوحيد.

- إذا كانت E سلسلة فإن العنصر الأعظمي M والعنصر الأكبر تنطبقان دوماً.

③ - الحد الأعلى: يسمى العنصر m من E حداً أعلى للمجموعة الجزئية A من E إذا كان من أجل أي $x \in A$ فإن: $m \geq x$.

- مثال:

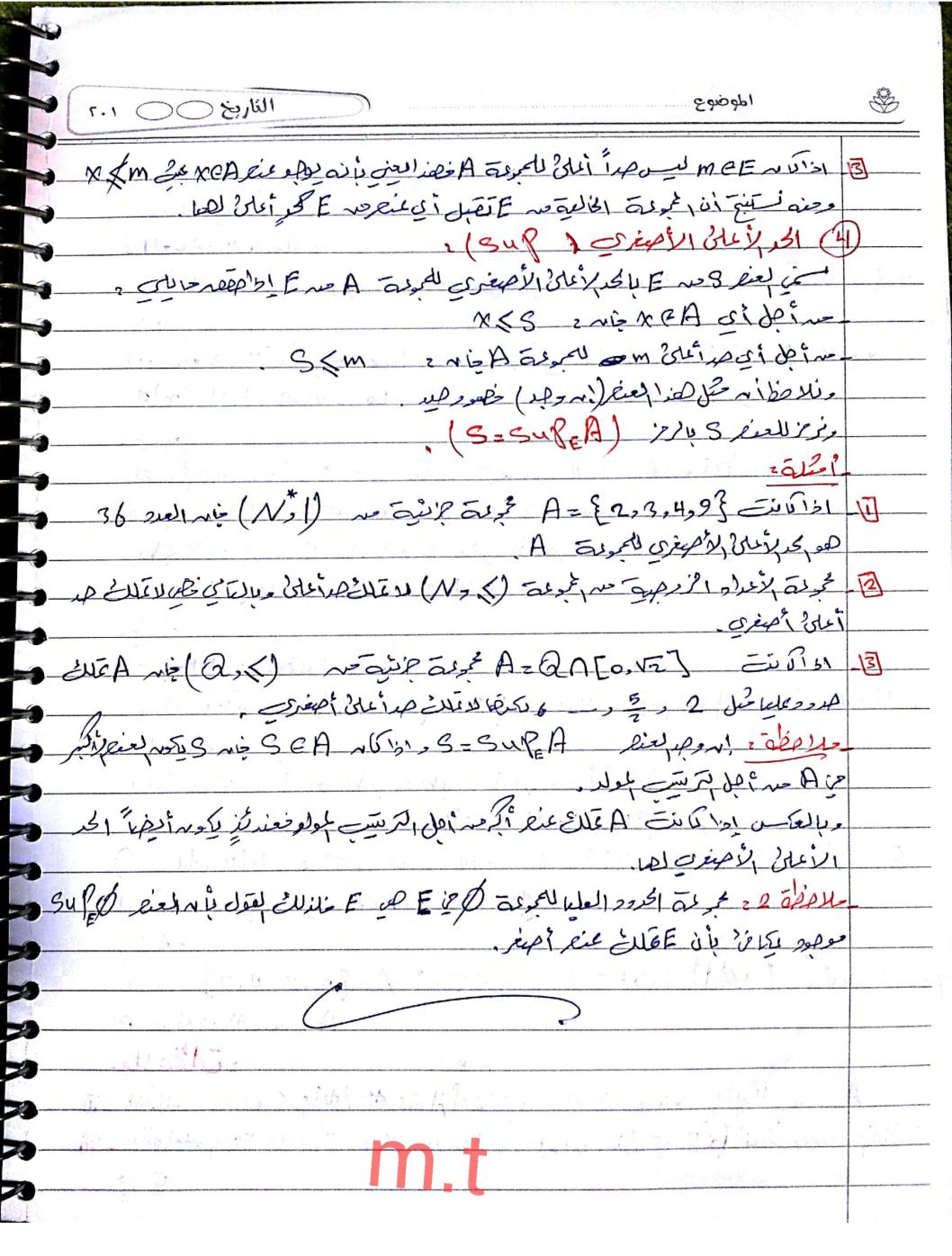
لتكن $A = \{2, 3, 4, 9\}$ مجموعة جزئية من المجموعة المرتبة $(N^*, /)$ فإن كلاً من 72, 36 هو حد أعلى للمجموعة A.

- ملاحظة:

$m \in A$

1 - إذا كان m هو الحد الأعلى للمجموعة A عندئذٍ يكون هو نفسه العنصر الأكبر للمجموعة A.

2 - نقول عن المجموعة الجزئية A التي تملك على الأقل حد أعلى في E بأنها محدودة من الأعلى في E.



3) اذا كان $m \in E$ ليس حداً أعلى للمجموعة A فهذا يعني بأنه يوجد عنصر $x \in A$ بحيث $x \not\leq m$
ومنه نستنتج أن المجموعة الخالية من E تقبل أي عنصر من E كحد أعلى لها.

4) الحد الأعلى الأصغري (sup):
نسمي العنصر S من E بالحد الأعلى الأصغري للمجموعة A من E إذا تحقق ما يلي:
- من أجل أي $x \in A$ فإن: $x \leq S$
- من أجل أي حد أعلى m للمجموعة A فإن: $S \leq m$.

ونلاحظ أن مثل هذا العنصر (إن وجد) فهو وحيد.
ونرمز للعنصر S بالرمز ($S = sup_E A$).

أمثلة:
1) اذا كانت $A = \{2,3,4,9\}$ مجموعة جزئية من $(N^*, |)$ فإن العدد 36 هو الحد الأعلى الأصغري للمجموعة A.
2) مجموعة الأعداد الزوجية من مجموعة $(N, \leq)$ لا تملك حداً أعلى وبالتالي فهي لا تملك حد أعلى أصغري.
3) اذا كانت $A = Q \cap [0, \sqrt{2}]$ مجموعة جزئية من $(Q, \leq)$ فإن A تملك حدود عليا مثل 2 و $\frac{5}{2}$ و ... لكنها لا تملك حداً أعلى أصغري.

ملاحظة: إن وجد العنصر $S = sup_E A$، وإذا كان $S \in A$ فإن S يكون العنصر الأكبر في A من أجل الترتيب المولد.
وبالعكس إذا كانت A تملك عنصر أكبر من أجل الترتيب المولد فعندئذ يكون أيضاً الحد الأعلى الأصغري لها.

ملاحظة 2: مجموعة الحدود العليا للمجموعة $\emptyset$ في E هي E فلذلك القول بأن العنصر $sup_E \emptyset$ موجود يكافئ بأن E تملك عنصر أصغر.